位相をもったある代数(半群・形式言語および語の組合せ論)

井関, 清志

数理解析研究所講究録
910巻 1995年 27-35

位相をもったある代数

井関　清志 (Kiyoshi Iseki)

A.Tarski の high school identity については，いろいろな結果だけが，報告されているが，それらの多くはまだ公表されていないようでである．W.Taylor [8] には，いくつかの結果だけが紹介されている．

high school identity からできている HSI-algebra の公理系はつぎの恒等式だけで，与えられている．

この代数では，三つの binary operation +，・，ベキと一つの constant 1 からなり，公理系は

(1) $$x+y=y+x,$$

(2) $$x+(y+z)=(x+y)+z,$$

(3) $$x\cdot 1=x,$$

(4) $$x\cdot y=y\cdot x,$$

(5) $$x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z,$$

(6) $$x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z,$$

(7) $$1^x=1,$$

$$(8)\qquad x^{1} = x,$$

$$(9)\qquad x^{y+z} = x^{y}\cdot x^{z},$$

$$(10)\qquad (x\cdot y)^{z} = x^{z}\cdot y^{z},$$

$$(11)\qquad (x^{y})^{z} = x^{yz}.$$

である．すなわち，HSI-algebra は ＋ と ・ に関しては，multiplicative unit 1 をもった semiring である．一方，HSI-algebra 以外，ベキについての条件（7）～（11）を満たすような代数系はいままでに出てこない．重要な二項演算については，J.Jezek, T.Kerka and P.Nemec [6] にみられるが，そこにも現れていない．条件（9),(10),(11) は R.Dedekind が「数とはなにか，なんであるべきか」になかで，ベキについて証明した三つの恒等式そのものである．

HSI-algebra は等式だけからなり，さらにベキの演算をいろいろに決めることによって，つぎの例で，示すように，従来から知られている種々の代数系を含む．したがって，この代数は category theory の対象になると同時に variety としての取り扱いも可能になる．

例 1．正の整数，有理数，実数の集合などは，もちろん普通の演算のもとで，HSI-algebra である．

例 2．$x^{y} = x$ とおくことによって，ベキの概念がなくなり，積について，unit をもつ semiring になる．このことか

ら semilattice, distributive lattice, Boolean algebra などはいずれもみな HSI-algebra の特別な場合とみられる。とくに Boolean algebra では,

$$x + (-y) = x^y.$$

例 3. $+$,$\cdot$ を lattice operation とし, x^y を pseudo complement(つまり $y \wedge z \leqq x \rightleftarrows z \leqq x \to y\ (= x^y)$) にとれば, Heyting algebra がえられる。くわしくは, たとえば, S.MacLane and I.Moerdijk [7].

例 4. finite HSI-algebra については, 元の個数が 2, 3 の場合は完全に知られている。2-element HSI-algebra は 5 個, 3-element HSI-algebra は 44 個ある。くわしいことは S.Burris and S.Lee [1].

なお HSI-algebra の条件のうち, ordinal number で成立しないものは, 前半では, 交換律 (1) と (4) である。x^y は ordinal number theory の意味で, y の連続関数である。また

$$(2 \cdot 2)^\omega = 4^\omega = \omega < 2^\omega 2^\omega = \omega^2.$$

したがって, (10) は成立しない。

一般に, HSI-algeba では, 0 の存在を仮定していない。0

0の扱いとしては，

$$x + 0 = x, \quad x \cdot 0 = 0$$

とすることには，異議はなかろう．つぎにベキについては，もとのHSI-algebraの元 x に対しては，

1) $x^0 = 1$,

2) $0^x = 0$

とすることにも，問題はなかろう．しかし 0^0 をどのように扱うかについては，すこし考えてみる必要がある．

1') $x \neq 0$ ならば $x^0 = 1$ で，$0^0 = 0$,

2') $x \neq 0$ ならば，$0^x = 0$ で，$0^0 = 1$.

このように 0 を含むときには，二つの代数がえられる．しかも上の命題では，いわゆる quasi identity が顔をみせる．

ここでつぎの問題が出てくる．

問題 1．0を含むこれらの algebra の class は variety でない真の quasi variety をつくっているか．

topology をもった quasi variety の topology をもった場合については，D.M.Clark and P.H.Krauss [2]．

HSI-algebra に，$x + y$，$x \cdot y$ および x^y のいずれも二変数の関数として連続になるように，T_2-topology を入れる．これを topological HSI-algebra という．

いろいろなことについては，W.W.Comfort，K.H.Hofmann and

D.Remus [3], K.H.Hofmann [5].

このとき Wallace の lemma をつかうとまず

1) compact HSI-algebra X において，A，B を X の subset とする．そのとき

(1) A，B が compact ならば，A^B がまた compact である．

(2) A，B がともに connected ならば，A^B がまた connected である．

(3) A，B がともに arcwise connected ならば，A^B がまた arcwise connected である．

さらにいくつかの関連した結果がえられる．

いま HSI-algebra の条件のうち，unit 1 の存在とその条件 (7)，(8)を除いてみる．この新しい代数 X を compact であると仮定する．

X の closed subset A で，

$$(a) \qquad A^A \subset A$$

となるものの全体を考える．X が compact であるから，このなかに minimal closed set A で上の条件 (a) を満たすものが存在する．$x \in A$ とすれば，

$$(A^x)^{A^x} = (A^{A^x})^x \subset (A^A)^x \subset A^x.$$

よって

$$A^x = A$$

さらに $A^A = A$ がえられる.

A の任意の元 x から, はじめて, $y^x = x$ となる y が A のなかにとれる. この y に対して, おなじようにして, $z^y = y$ となる(A の)元 z が取れる. これらの元からなる点列を $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ とする. この点列がある点 a に収束すれば,

$$a^a = a$$

を満足する点が得られる.

これは一般には, いえそうにない. その理由は, 和や積については, 結合律が成り立っているので, これを利用して, $a + a = a$ や $bb = b$ となる元の存在が証明できる. ベキについては, 結合律がない.

いままでに知られている finite HSI-algebra では, $a^a = a$ を満たす元 a が存在するものがはるかに多い. finite Gurevic algebra では, いままでに知られている具体例では, すべてに存在する.

問題 2. HSI-algebra で, unit 1 以外に, $a^a = a$ を満足する a(power idempotent) が存在する条件を求めよ.

ここで Gurevic algebra [4]とは, Wilkie の等式

$$(P^x + Q^x)^y(R^y + S^y)^x = (P^y + Q^y)^x(R^x + S^x)^y$$

を満足する HSI-algebra のことである．ここで，$P(x) = 1 + x$, $Q(x) = 1 + x + x^2$, $R(x) = 1 + x^3$, $S(x) = 1 + x^2 + x^4$.

topological HSI-algebra X の 1 の component を C とすれば，C は closed set で，さらに

$$C^C = C = CC.$$

0 をもった topological HSI-algebra H では，$0^0 = 0$ または 1 であるから 0 の component を D とすれば，

$$D + D = D = DD.$$

D^D はつねに connected set である．しかしここで，0^0 の様子で二つの場合に分かれる．

1) $0^0 = 0$ のとき．

$$0 \in D^D \to D^D = D + D = D = DD$$

であるから，H の任意の元 a

$$Da \subset D$$

となり，

$$D^H = D$$

が得られる．

2) $0^0 = 1$ のとき．

D^D は C と交わる。したがって

$$D^D \subset C$$

$a \neq 0$ ならば，1 は a^D に属する．よって $a^D \subset C$．したがって

$$H^D \subset C.$$

0 をもった topological HSI-algebra H において，0 と 1 を同時に含む connected set A が存在すれば，H の任意の元 x に対して

$$x = x1 = xA$$

$$0 = x0 \in xA.$$

よって任意の元 x と 0 を含む connected set が存在する．H はこれらの connected set の和集合である．このことから，H 自身が connected set であることがわかる．

関連した結果は Malcev の結果[9]である．

文　　献

1. S.Burris and S.Lee, Small models of the high school identties, International Jour. of Algebra and Computation, 2(1992), 139-178.

2. D.M.Clark and P.H.Krauss, Topological quasi varieties, Acta Sci. Math., 47(1984), 3-39.

3. W.W.Comfort, K.H.Hofmann and D.Remus, Topological groups and semigroups, Recent Progree in General Topology, 1992, 59-144.

4. R.Gurevic, Equational theories of positive numbers with exponentiation is not finitely axiomatizable, Ann. Pure and Applied Logic, 49(1990), 1-30.

5. K.H.Hofmann, Continuous lattices, topology and topological algebra, Topology Proceedings, 2(1977), 179-211.

6. J.Jezek, T.Kepka and P.Nemec, Distributive groupoids, Pozpravy Ceskoslovenske Akademie 91(1981).

7. S.MacLane and I.Moerdijk, Sheaves in geomerty and Logic, Springer Universitext,1992.

8. W.Taylor, Equational logic, Houston Jour. of Math., 9(1979), 1-83.

9. A.I.Malcev, On the general theory of algebraic systems, Mat. Sb. (N.S.) 35(77)(1954), 3-20.